FORSCHENDES LERNEN MIT HILFE VON OPTIMIERUNGSAUFGABEN AM BEISPIEL EINES KLASSISCHEN LOKALISIERUNGSPROBLEMS

Martin Guggisberg
Torsten Linnemann
Beat Trachsler

49. GDM-Jahrestagung Basel 2015

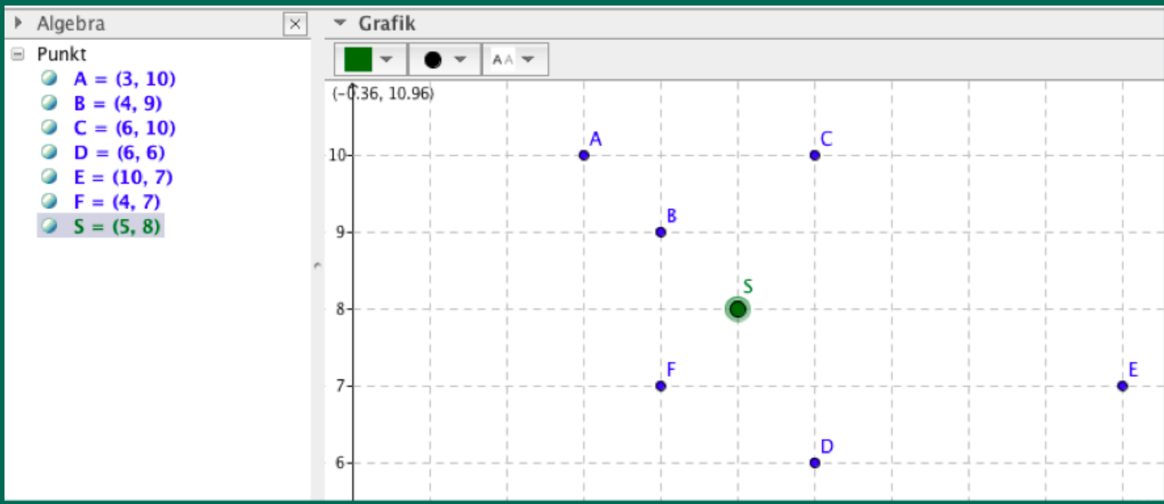
„ Wo ist der beste Standort für einen Spielplatz ? " Diese Aufgabe hat keine geschlossene algebraische Lösung – und bietet damit einen Einstieg in realitätsbezogene Situationen des Forschenden Lernens. Am Beispiel des historischen Fermat-Problems soll das für den Unterricht auf der Sekundarstufe 2 aufzeigt werden. Neben numerischen Verfahren werden Lösungen mit GeoGebra vorgestellt.

AGENDA

1. Fallbeispiel Spielplatz
2. Reduzierung der Problemgrösse
3. Einsatz von numerischen Methoden
4. Interaktive Experimente

EIN FALLBEISPIEL ZU FORSCHENDEM LERNEN

WO IST DER BESTE ORT FÜR EINEN SPIELPLATZ?

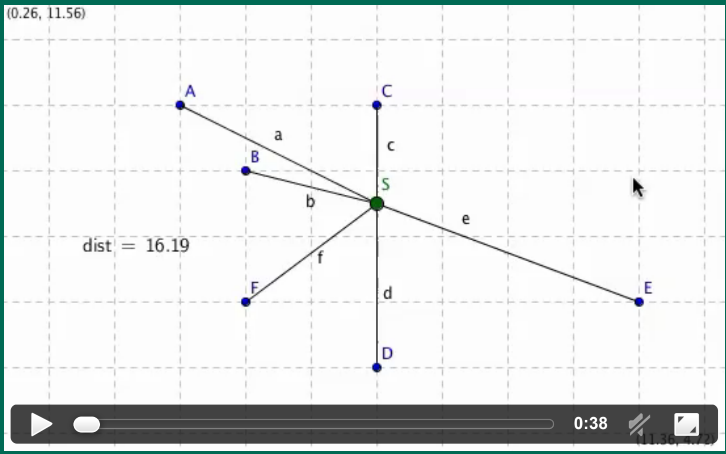


Roth-Sonnen Nicole, Leuders, T., Barzel, B., & Hußmann, (2005). Computer, Internet und co im Mathematikunterricht. (S. 190) Berlin: Cornelsen.

SCHÜLERINNEN UND SCHÜLER SCHLÜPFEN IN DIE ROLLE EINES GUTACHTERS

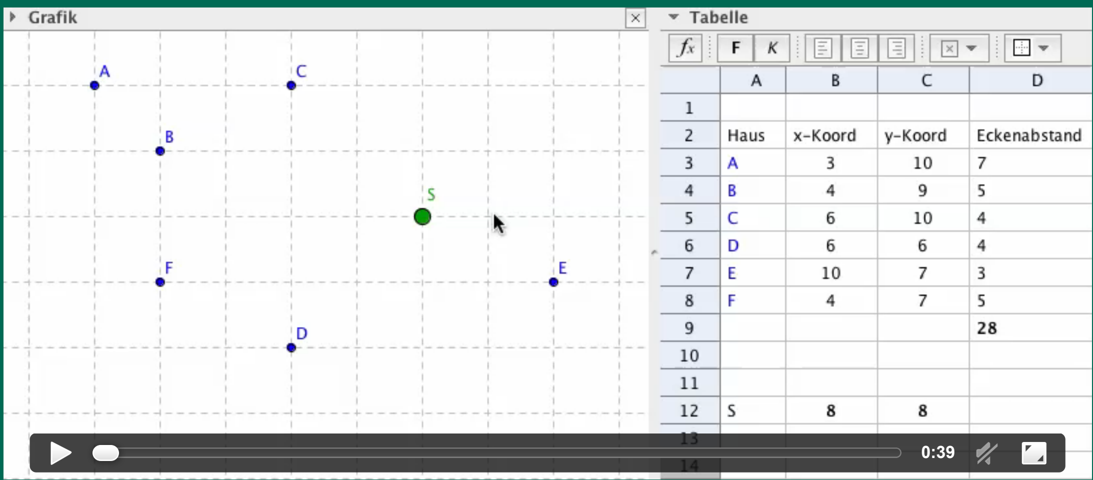
- Möglichst kurzer Weg ?
- Direkt (durch das Gelände) oder einer Strasse nach ?
- Sollen Häuser mit mehr Kindern äquivalent gewichtet werden ?

DIREKTER WEG



[Link zu GeoGebraTube: Spielplatz_Entfernung](#) von [Torsten Linnemann](#)

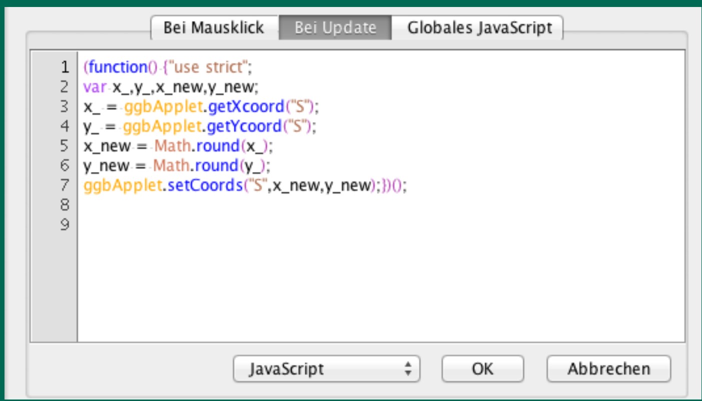
ECKENHAUSEN, WEGE ENTLANG EINES QUADRATISCHEN GITTERS



[Link zu GeoGebraTube: spielplatz_Eckenhausen](#) von [Torsten Linnemann](#)

GANZZAHL-ARITHMETIK MIT GEOGEBRA

```
(function(){
    "use strict";
    var x_,y_,x_new,y_new;
    x_ = ggbApplet.getXcoord("S");
    y_ = ggbApplet.getYcoord("S");
    x_new = Math.round(x_);
    y_new = Math.round(y_);
    ggbApplet.setCoords("S",x_new,y_new);
})();
```



REDUZIERUNG DER PROBLEMGRÖSSE AUF 3 PUNKTE

AUS DEM 17. JAHRHUNDERT

HISTORISCHEN PROBLEMSTELLUNG

VON FERMAT

91 Fermat's Problem for Torricelli

To find the point the sum of whose distances from the vertexes of a given triangle is the smallest possible.

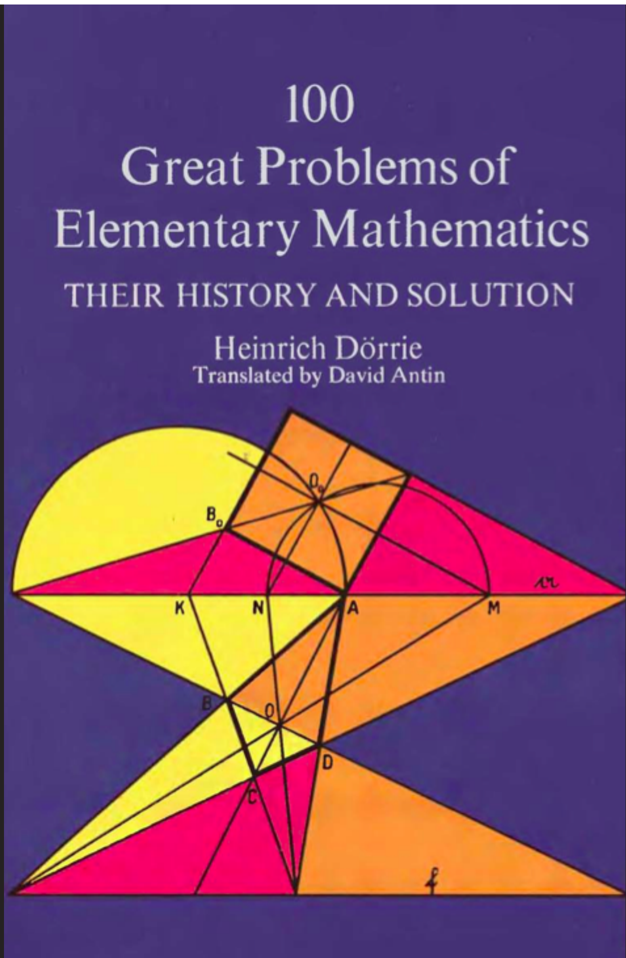
This celebrated problem was put by the French mathematician Fermat (1601–1665) to the Italian physicist Torricelli (1608–1647), the famous student of Galileo, and was solved by the latter in several ways.

"Wo befindet sich ein Punkt P in einem Dreieck, wenn die Summe aller Abstände von diesem Punkt P zu den drei Ecken minimal sein soll."

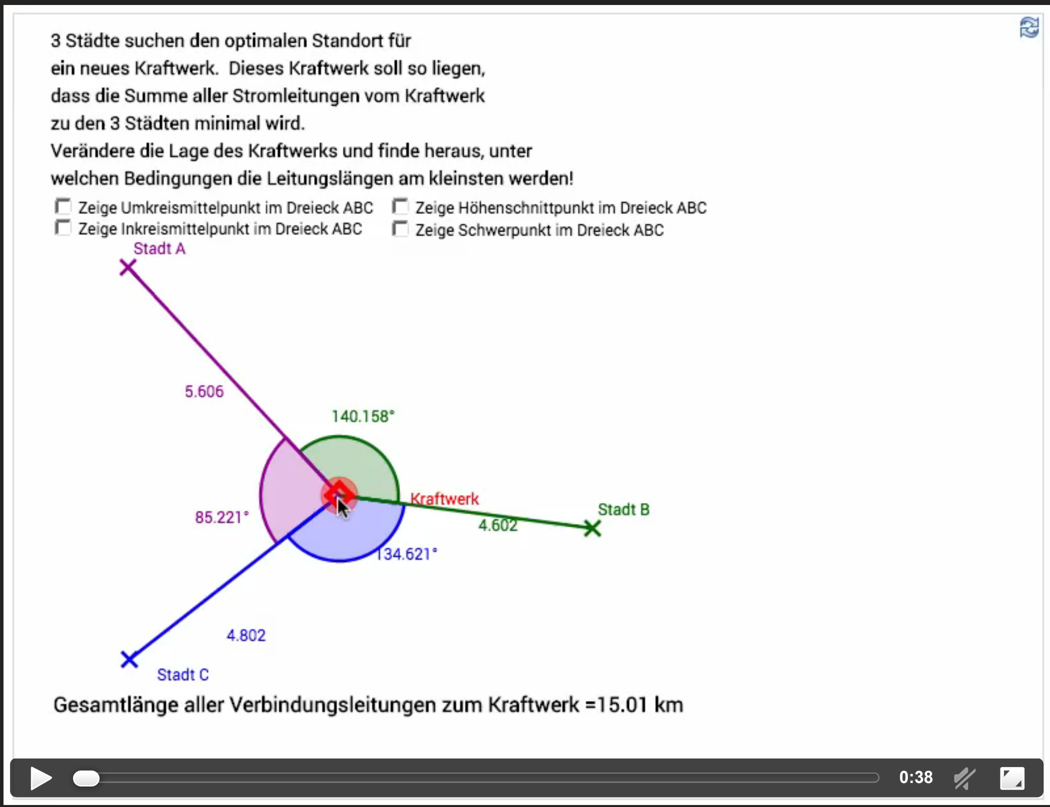
Dörrie, H. (2013). 100 great problems of elementary mathematics. Courier Dover Publications.

ZAHLREICHE WEITERE BEZEICHNUNGEN

the Fermat problem, the Fermat-Torricelli problem, the Steiner problem, the Steiner-Weber problem, the Weber problem, **the Fermat-Weber problem**, the weber facility problem, the one median problem, the median center problem, the spatial median problem, the minimum aggregate travel point problem



MODERNE FORMULIERUNG



Link zu GeoGebraTube: Der Neubau des Kraftwerks von Ulrich Steinmetz

Wo befindet sich der beste Standort für ein Kraftwerk?

Wo soll ein Spielplatz gebaut werden?

äquivalente Fragestellung ?

Alltagsbezug ?

Es gibt verschiedene Möglichkeiten die Mitte des Dreiecks zu definieren.

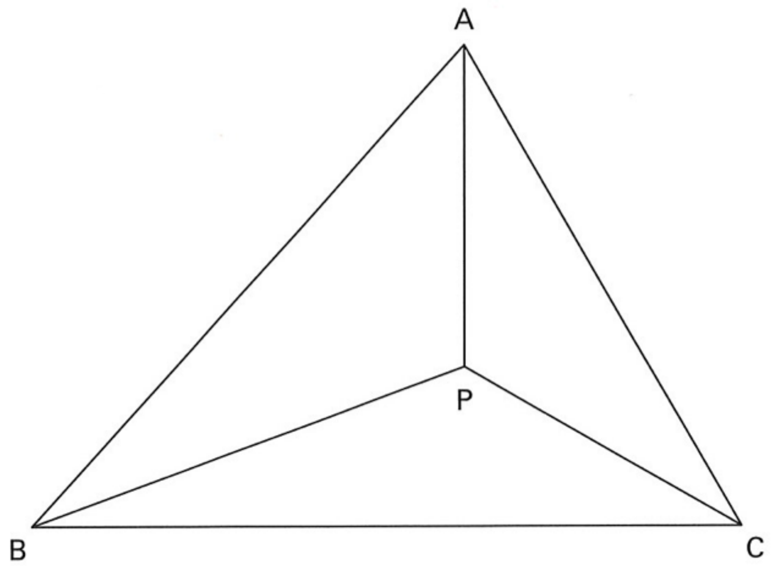
38

Hat ein Dreieck eine Mitte?

Spezielle Linien wie Mittelsenkrechte, Winkelhalbierende, Höhen oder Seitenhalbierende legen in einem Dreieck Punkte fest. Welcher dieser Punkte ist der «wahre» Mittelpunkt eines Dreiecks?

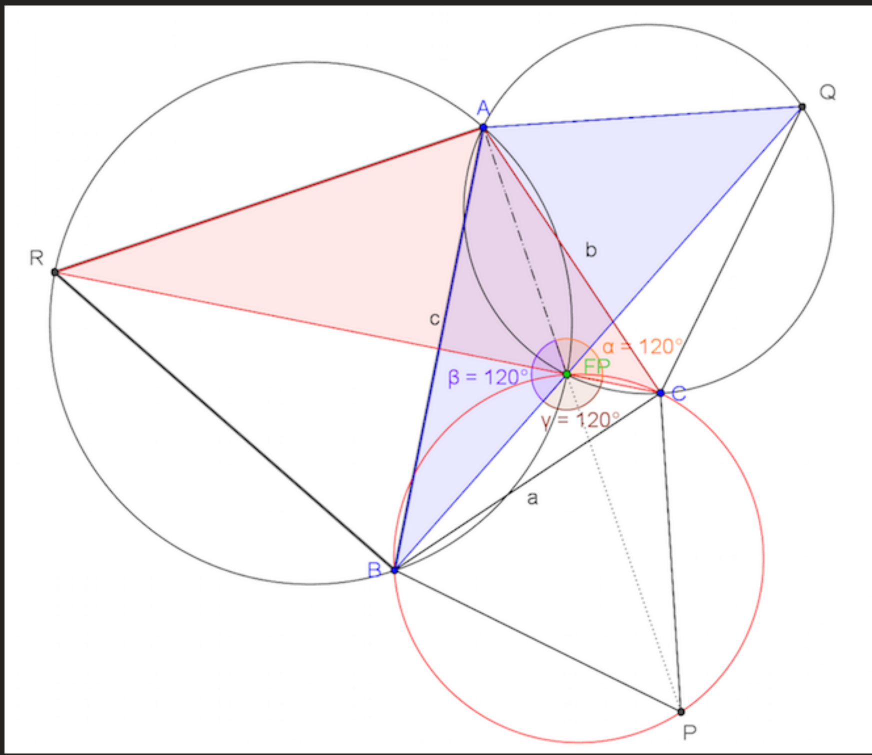
Schweizer Mathbuch Band8 LU18

Bestimme im spitzwinkligen Dreieck ABC einen Punkt P so, dass die Summe der Abstände von P zu A, B und C möglichst klein wird.



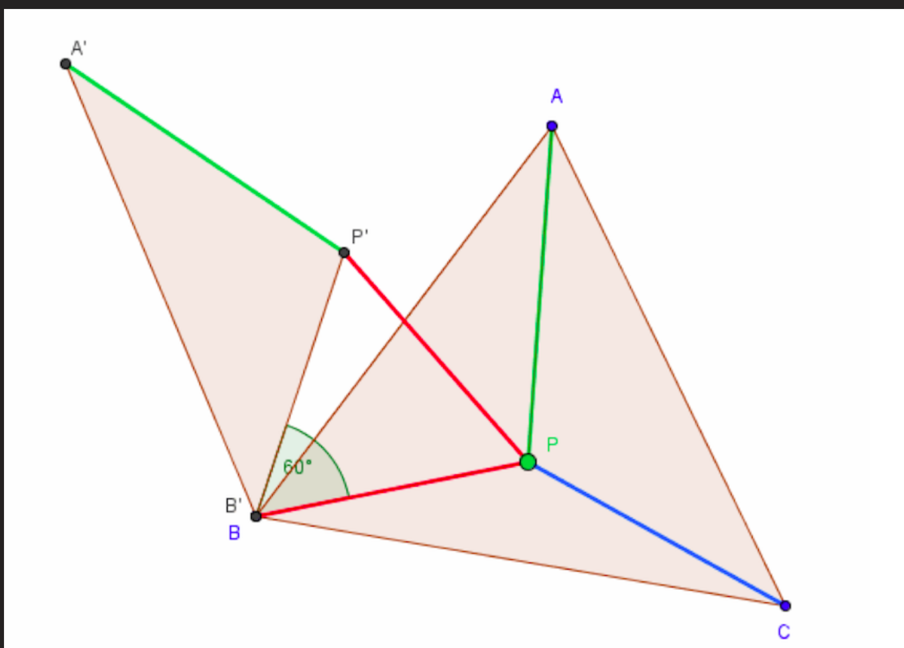
Link zu GeoGebraTube

EIN GEOMETRISCHER BEWEIS FÜR N=3



[Link to Geogebra Material]

BEWEIS MIT STRECKENZUG



(LU 18, ICT-Zusatzmaterial)

VORGEHEN:

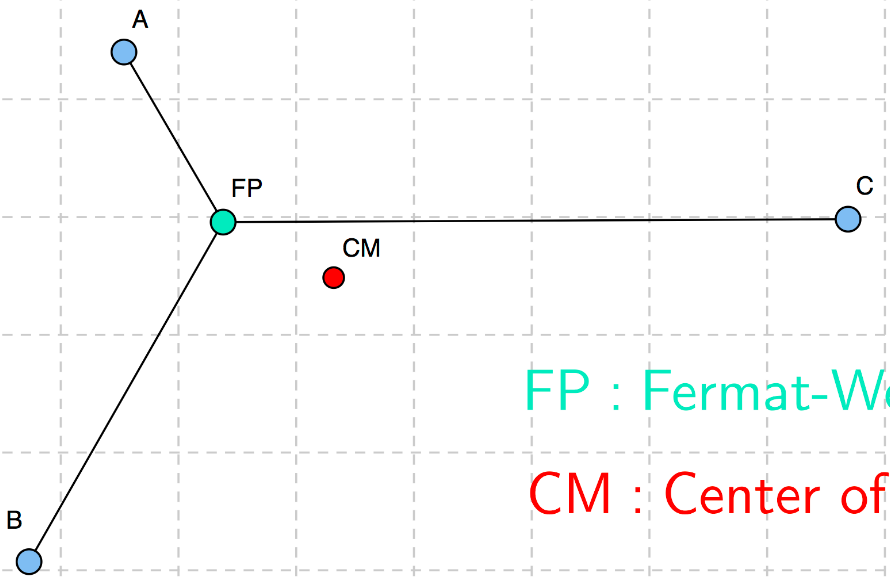
1. Im Dreieck ABC setzen wir irgendwo den Punkt P.
2. Nun drehen wir das Dreieck ABP um 60° um den Punkt B. So entsteht ein gleichseitiges Dreieck BPP'. Der Streckenzug A'P'PC entspricht nun der Abstandssumme von P zu den Ecken des Dreiecks ABC.
3. Bewegt man den Punkt P so, dass der Streckenzug A'P'PC geradlinig wird, so hat man die minimale Abstandssumme gefunden.

WEITERE LÖSUNGEN:

Approximation Algorithms for Facility Location Problems

BETRACHTUNGSWEISE ALS OPTIMIERUNGSPROBLEM

$$\text{minimize}_{x,y} \quad f(x,y) = \sum_{i=1..n} \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}$$

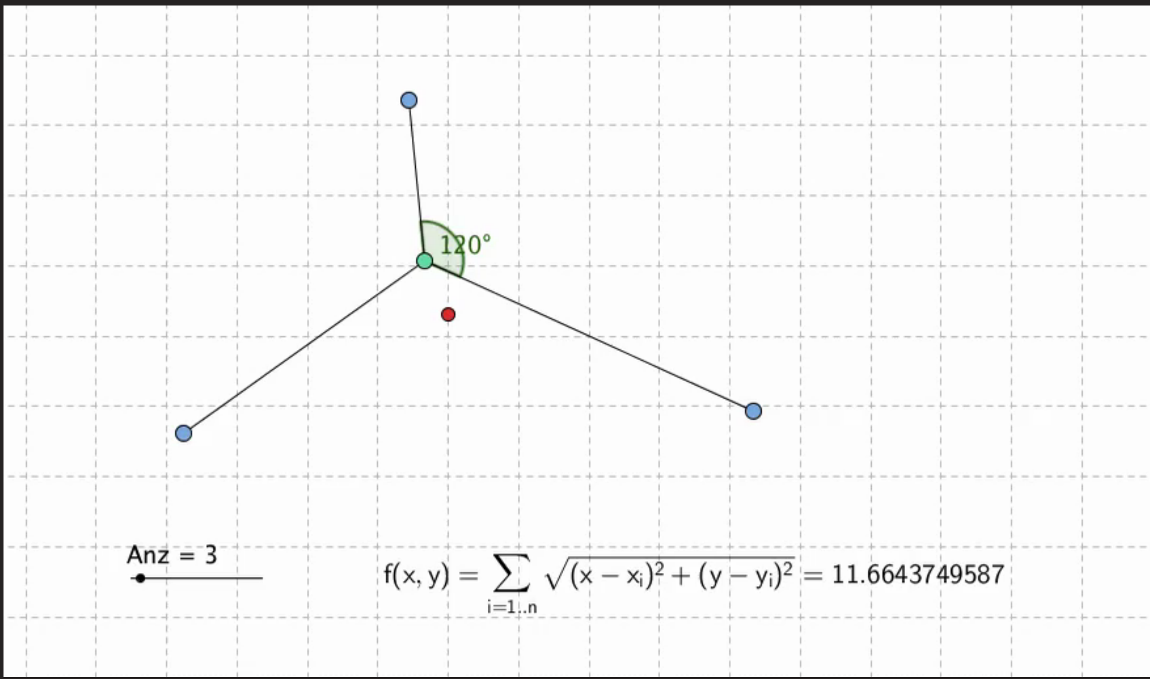


FP : Fermat-Weber Point

CM : Center of mass

Das so formulierte Optimierungsproblem ist für Schülerinnen und Schüler verständlich, jedoch nicht ohne Hilfsmittel lösbar

FÜR N=3 KANN EIN WINKEL VON 120° BEOBACHTET WERDEN



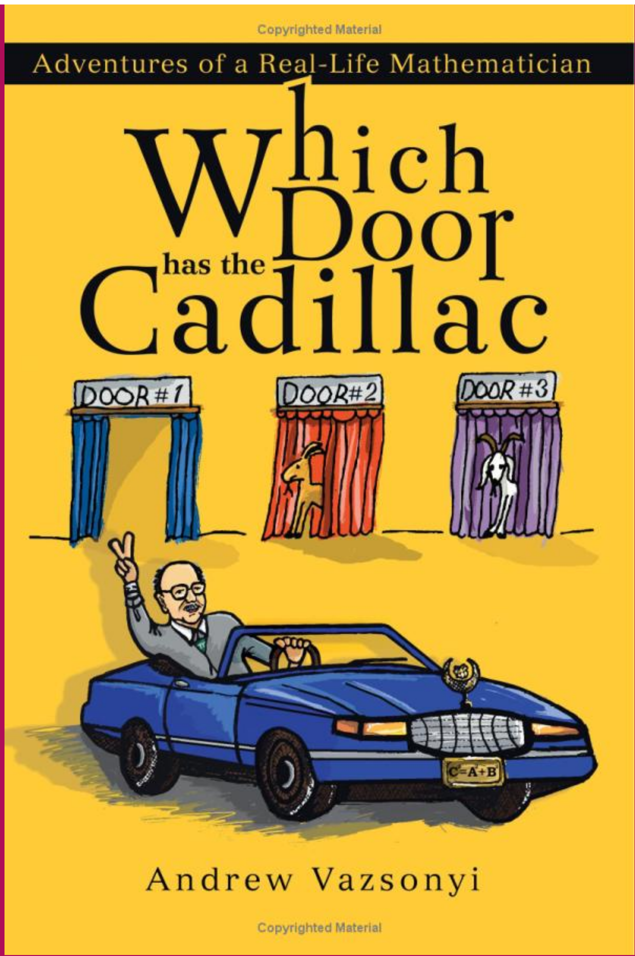
● Fermat-Punkt ● Schwerpunkt

WEISZFELD ALGORITHMUS

von Andrew Vázsonyi,

alias Endre Weiszfeld (1916–2003)

geboren in Budapest



Computers have the potential to turn the biggest math-phobe into a math user, if not a lover.

Andrew Vázsonyi in his book:

Which Door has the Cadillac Adventures of a Real-Life Mathematician

WEISZFELD ALGORITHMUS

k Iterationsschritte

Ortsvektoren: $\overrightarrow{x_1} \cdots \overrightarrow{x_N}$

Startpunkt $\overrightarrow{y_0}$ im Schwerpunkt

$$\overrightarrow{y_{k+1}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \frac{\overrightarrow{x_i}}{\|\overrightarrow{x_i} - \overrightarrow{y_k}\|}}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\|\overrightarrow{x_i} - \overrightarrow{y_k}\|}}$$

[H. Üster, R.F. Love, The convergence of the Weiszfeld algorithm, Computers & Mathematics with Applications, Volume 40, Issues 4–5, August–September 2000, Pages 443-451, ISSN 0898-1221]

WEISZFELD ALGORITHMUS MIT JAVASCRIPT (I)

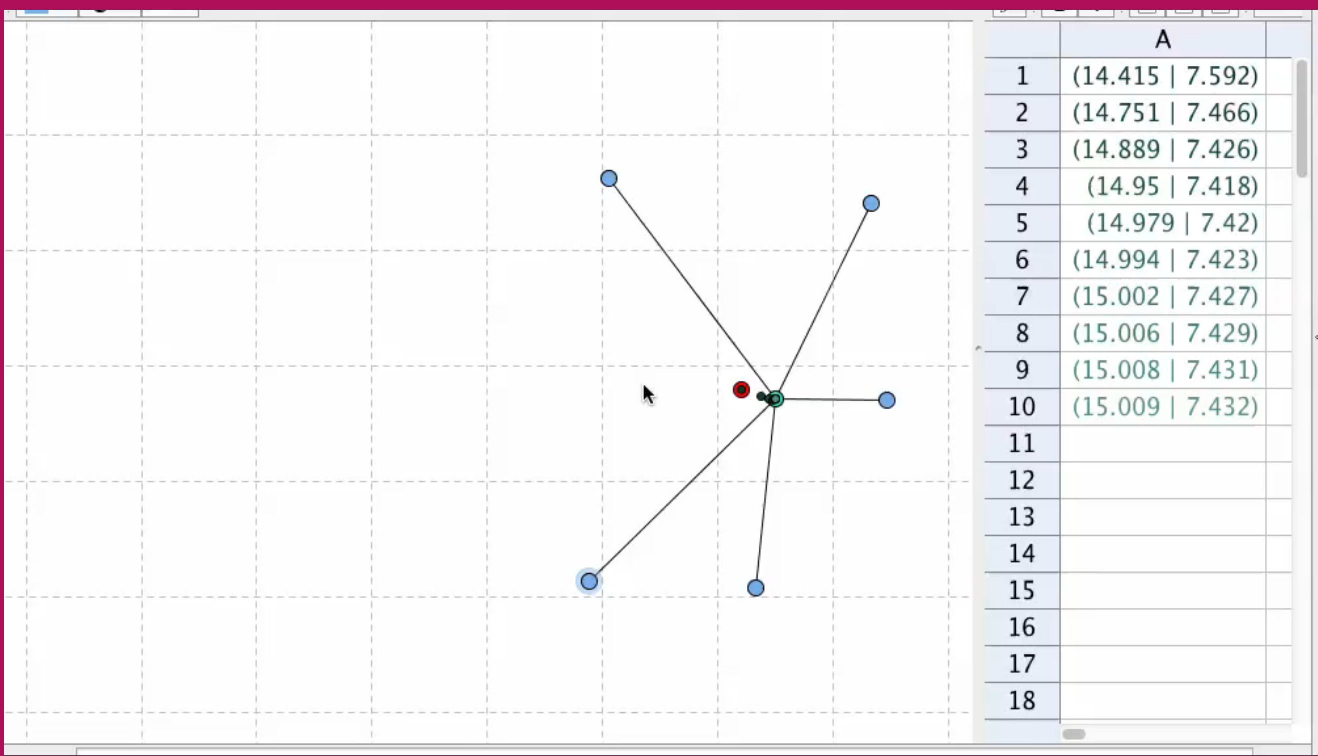
```
geometric_median = function(epsilon) {
    var P,Q;
    P={};
    P.x=gb.getXcoord("CM");
    P.y=gb.getYcoord("CM");

    while (true){
        Q = median_approx(P);
        if (eukl_distance(P, Q) < epsilon){
            return Q;
        }
        P = Q;
    }
};
```

WEISZFELD ALGORITHMUS MIT JAVASCRIPT (II)

```
median_approx = function(P) {
    var W,x,y,d,w,_len,_i,Q;
    W=x=y=0.0;
    Q={};
    _len=xl.length
    for (_i = 0; _i < _len; _i++) {
        Q.x = xl[_i];
        Q.y = yl[_i];
        d=eukl_distance(Q,P);
        if (d != 0){
            w =1.0/d;
            W+= w;
            x+=Q.x*w;
            y+=Q.y*w;
        }
    }
    Q.x = x/W;
    Q.y = y/W;
    return Q;
  };
```

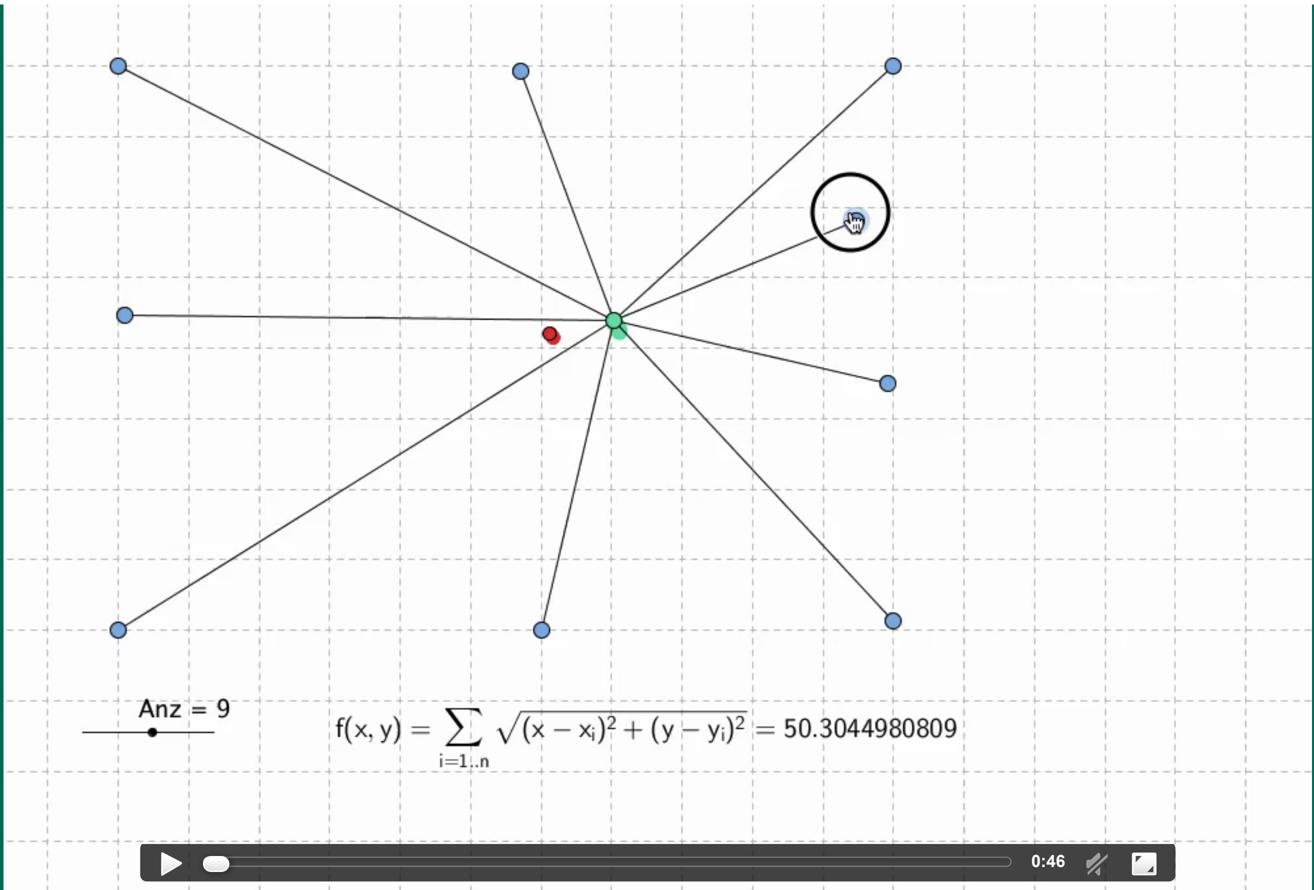
KONVERGENZVERHALTEN



Link zu GeoGebraTube: Weiszfeld Algorithmus von Martin Guggisberg

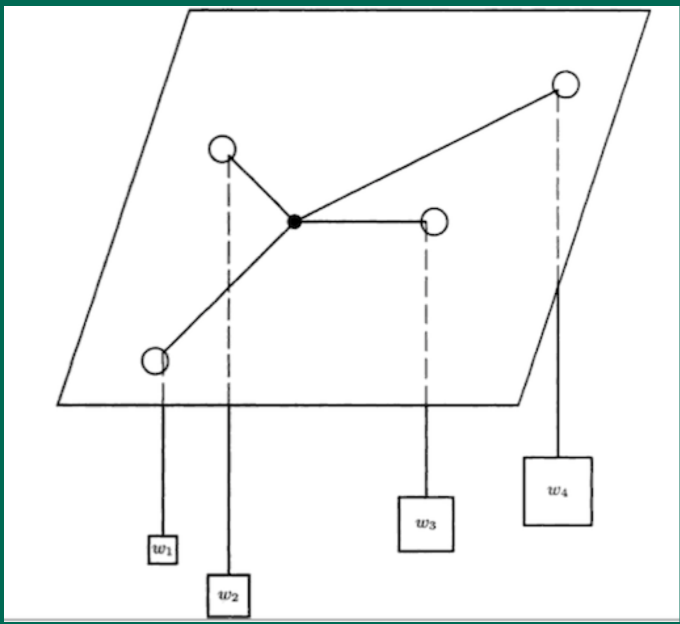
EXPERIMENTIEREN

PHÄNOMENOLOGIE



● Fermat-Punkt ● Schwerpunkt

Varignon Frame von Pierre de Varignon

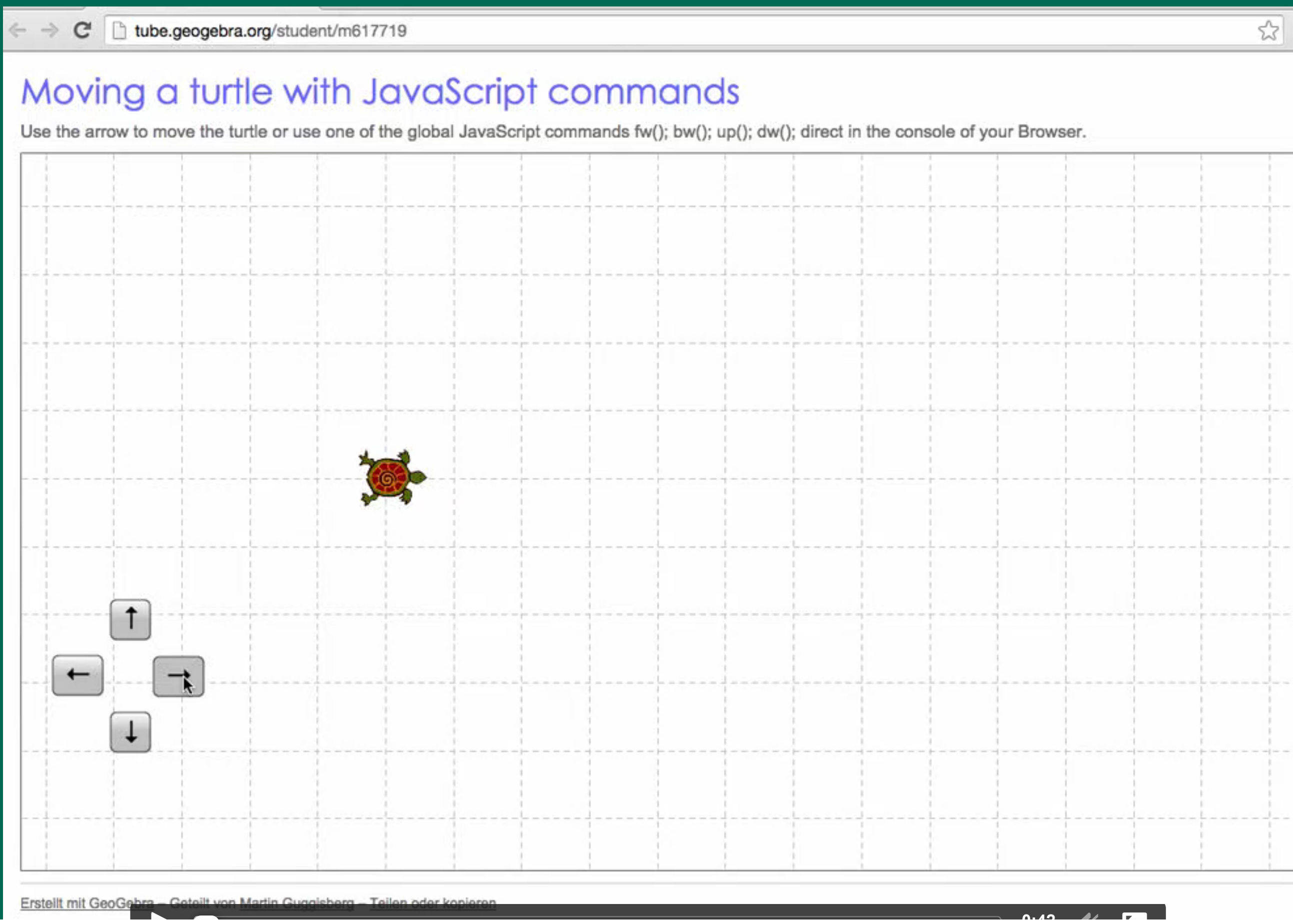


Canbolat, M. S., & Wesolowsky, G. O. (2012). On the use of the Varignon frame for single facility Weber problems in the presence of convex barriers. European Journal of Operational Research, 217(2), 241-247. Link

WEITERES POTENZIAL VON

INTERAKTIVEN EXPERIMENTEN

Z.B. BEWEGUNGEN VISUALISIEREN



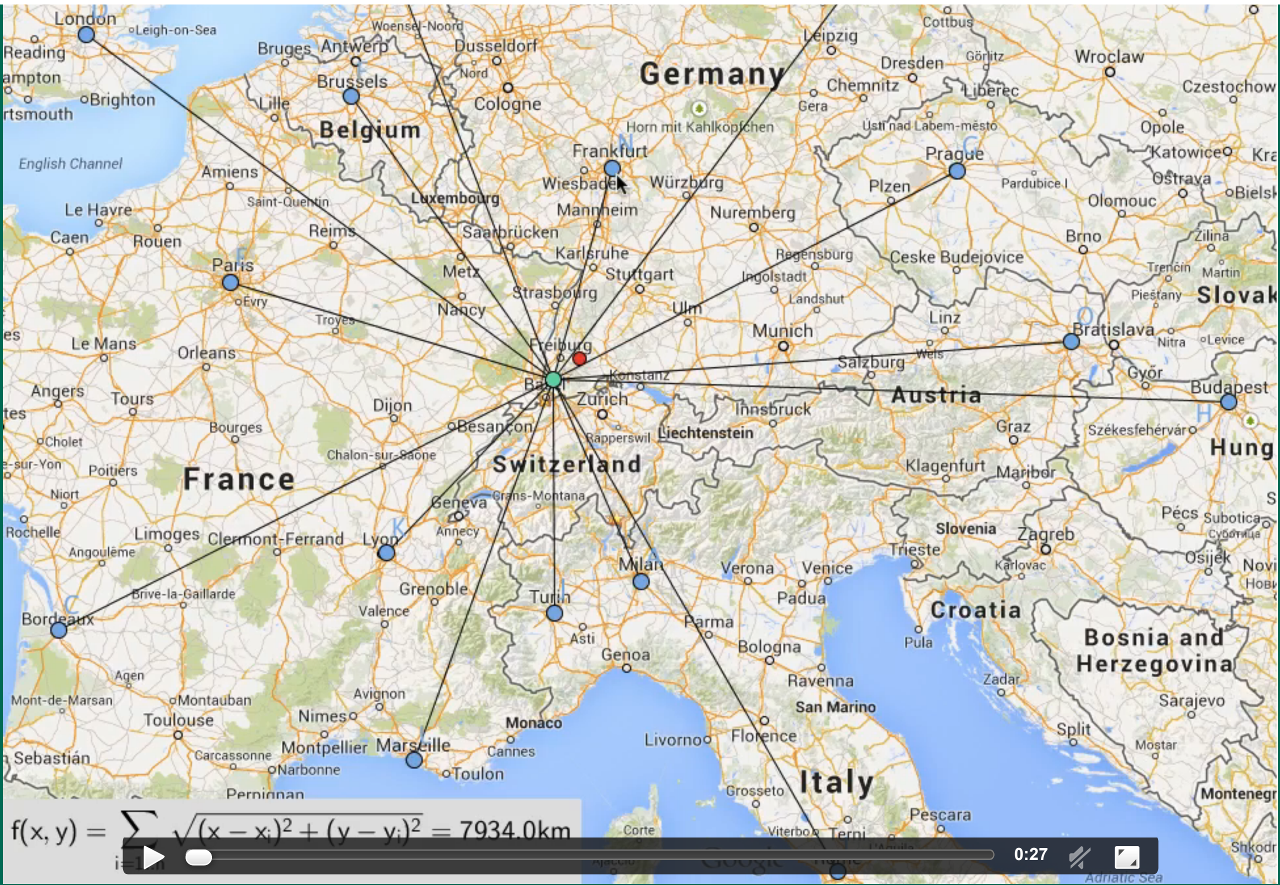
INTERAKTIONEN PROGRAMMIEREN

EINEN SCHRITT VORWÄRT

JAVASCRIPT FUNKTION INNERHALB GEOGEBRA

```
fw = function(){
(function(){
    "use strict";
    var x_,y_
    x_ = ggbApplet.getXcoord("P");
    y_ = ggbApplet.getYcoord("P");
    ggbApplet.setCoords("P",x_+1,y_);
})();
};
```

WO BEFINDET DIE MITTE VON EUROPA ?



Link zu GeoGebraTube

THANKS TO

- Torsten Linnemann
- Beat Trachsler

GeoGebra institute PH FHNW Switzerland

Literatur

- Balinski, M. L., (1966). On finding integer solutions to linear programs. In Proc. IBM Scientific Computing Symposium on Combinatorial Problems (S. 225-248)
- Bruder, R. (2014). Forschen, Explorieren, Problemlösen. In Linneweber-Lammerskitten, H. (Hrsg.). Fachdidaktik Mathematik. Grundbildung und Kompetenzaufbau im Unterricht der Sek. I und II. Seelze: Klett/Kallmeyer.
- Barzel, B., Büchter, A., & Leuders, T. (2014). Mathematik Methodik, Handbuch für die Sekundarstufe I und II. 11. Auflage Berlin: Cornelsen Verlag.
- Dörrie, H. (2013). 100 great problems of elementary mathematics. Courier Dover Publications.
- Engelhaupt, H. (2004). Kürzeste Wege, Teil I. Mathematikinformation, 41, 24-61.
- Gassner, C., & Hohenwarter, M. (2012). GeoGebraTube & GeoGebraWeb. Beiträge zum Mathematikunterricht 2012.
- Kaenders, R., & Schmidt, R. (2011). Mit GeoGebra mehr Mathematik verstehen. Vieweg+ Teubner, Wiesbaden.
- Ludwig, M., Oldenburg, R. (2007). Lernen durch Experimentieren – Handlungsorientierte Zugänge zur Mathematik. mathematik lehren, 141, 4-11
- Roth, J., & Weigand, H. G. (2014). Forschendes Lernen im Mathematikunterricht: Eine Annäherung. Beiträge zum Mathematikunterricht 2014 (S. 999–1002). Münster: WTM-Verlag
- Roth-Sonnen N., Leuders, T., Barzel, B., & Hußmann, (2005). Computer, Internet und co im Mathematikunterricht. (S. 190) Berlin: Cornelsen.
- Weiszfeld, E. (1937). Sur le point pour lequel la somme des distances de n points donnés est minimum. Tôhoku Mathematical Journal, 43, 355–386.